

УДК 539.37+539.214

Чигиринский В. В.

ИНВАРИАНТЫ В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается плоская задача теории пластичности и упругости. Анализ показывает, что с позиций решения задач теории пластичности [1–5], удается получить некоторые обобщения и для решений задач теории упругости [6, 7]. Обобщения касаются экспоненциальной и тригонометрических функций, которые записываются в виде соотношений Коши – Римана, и следующих из этого инвариантов, являющиеся обязательными, как для задач теории пластичности, так и для задач теории упругости.

Целью работы является получение обобщенных аналитических зависимостей для решения задач механики деформирования твердого тела.

Теория пластичности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot k^2; \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = F; \quad \xi_x + \xi_y = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

граничные условия заданы в напряжениях:

$$\tau_n = -k \cdot \text{Sin}[A\Phi - 2 \cdot \alpha].$$

Теория упругости:

уравнения плоской задачи теории упругости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \\ \tau_n = -\psi(x, y) \cdot \text{Sin}(W\Phi - 2\alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\psi(x, y) = \psi$ – функция координат очага деформации; k – сопротивление пластическому сдвигу.

Используя уравнения равновесия и условие пластичности, в (1) имеем обобщенное уравнение равновесия, в котором разрешающей функцией является касательное напряжение [3–5]:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}. \quad (3)$$

Условие неразрывности скоростей деформаций с учетом уравнений несжимаемости и связи, имеет вид для линейных составляющих тензора скоростей деформаций:

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \xi_x \cdot \text{tg} W\Phi. \quad (4)$$

Уравнение неразрывности деформации с учетом закона Гука представляется в упругой зоне для среднего нормального напряжения в виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5)$$

Если уравнения (3), (4), являются уравнениями гиперболического типа, то уравнение (5) относится к дифференциальным уравнениям в частных производных эллиптического типа [8].

Можно показать общность подходов в решениях задач механики деформированного твердого тела. С учетом граничных условий в системах (1) и (2) и анализа экспериментальных эпюр распределения контактных напряжений [3], [10] для (3), (4) и (5) можно принять следующие зависимости:

$$\tau_{xy} = H_{\sigma} \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi; \quad (6)$$

$$\xi_x = -\xi_y = \beta \cdot \cos B\Phi = H_{\xi} \cdot \exp \theta'' \cdot \cos B\Phi; \quad (7)$$

$$\sigma' = \sigma_x + \sigma_y = C_{\sigma} \cdot \exp \theta \cdot \cos (W\Phi), \quad (8)$$

где $\theta', \theta'', \theta$ – показатели экспонент в решениях для напряжений, скоростей деформаций в пластической и упругой зонах; $A\Phi, B\Phi, W\Phi$ – аргументы тригонометрических функций для напряжений, скоростей деформаций в пластической и упругой зонах; $H_{\sigma}, H_{\xi}, C_{\sigma}$ – функции и постоянная величина, определяющие напряженное, деформированное состояние среды в пластической и упругой зонах.

Показатели экспонент представляют собой координатные функции, конструкция которых в настоящий момент неизвестна. Функция Φ на данном этапе решения также неизвестна.

Подставляя (6) в (3), (7) в (4), (8) в (5) получим систему уравнений, в которых при тригонометрических функциях в квадратных скобках находятся операторы, связывающие показатель экспонент и аргумент тригонометрических функций. Представляет интерес при которых эти операторы могут быть равными нулю.

При этом уравнение (3) запишется:

$$\begin{aligned} & \left\{ H_{\sigma} \cdot \left[\theta'_{xx} + (\theta'_x + A\Phi_y)^2 - \theta'_{yy} - (\theta'_y - A\Phi_x)^2 \right] + (H_{\sigma})_{xx} + \right. \\ & + 2 \cdot (H_{\sigma})_x \cdot (\theta'_x + A\Phi_y) - (H_{\sigma})_{yy} - 2 \cdot (H_{\sigma})_y \cdot (\theta'_y - A\Phi_x) \left. \right\} \cdot \sin A\Phi + \\ & + \left\{ 2 \cdot H_{\sigma} \cdot (A\Phi_x - \theta'_y) \cdot (\theta'_x + A\Phi_y) - 2 \cdot (H_{\sigma})_y \cdot (A\Phi_y + \theta'_x) + \right. \\ & + 2 \cdot (H_{\sigma})_x \cdot (A\Phi_x - \theta'_y) + H_{\sigma} \cdot (A\Phi_{xx} - A\Phi_{yy}) \left. \right\} \cdot \cos A\Phi = \\ & = -2 \cdot H_{\sigma} \cdot A\Phi_{xy} \cdot \sin A\Phi + \left[2 \cdot (H_{\sigma})_{xy} + 2 \cdot H_{\sigma} \cdot \theta'_{xy} \right] \cdot \cos A\Phi; \end{aligned} \quad (9)$$

уравнение (4):

$$\begin{aligned} & \left\{ H_{\xi} \cdot \left[-\theta''_{xx} - (\theta''_x + B\Phi_y)^2 + \theta'_{yy} + (\theta'_y - B\Phi_x)^2 \right] - (H_{\xi})_{xx} - \right. \\ & - 2 \cdot (H_{\xi})_x \cdot (\theta''_x + B\Phi_y) + (H_{\xi})_{yy} + 2 \cdot (H_{\xi})_y \cdot (\theta'_y - B\Phi_x) \left. \right\} \cdot \cos B\Phi + \\ & + \left\{ 2 \cdot H_{\xi} \cdot (B\Phi_x - \theta''_y) \cdot (\theta''_x + B\Phi_y) - 2 \cdot (H_{\xi})_y \cdot (B\Phi_y + \theta''_x) + \right. \\ & + 2 \cdot (H_{\xi})_x \cdot (B\Phi_x - \theta''_y) + H_{\xi} \cdot (B\Phi_{xx} - B\Phi_{yy}) \left. \right\} \cdot \sin B\Phi = \\ & = 2 \cdot H_{\xi} \cdot B\Phi_{xy} \cdot \cos B\Phi + \left[2 \cdot (H_{\xi})_{xy} + 2 \cdot H_{\xi} \cdot \theta''_{xy} \right] \cdot \sin B\Phi; \end{aligned} \quad (10)$$

уравнение (5):

$$\begin{aligned} & \left\{ \theta_{xx} + (\theta_x - W\Phi_y)(\theta_x + W\Phi_y) + \theta_{yy} + (\theta_y - W\Phi_x)(\theta_y + W\Phi_x) \right\} \cdot \\ & \cdot \cos(W\Phi) - \left[2\theta_x W\Phi_x + 2\theta_y W\Phi_y + W\Phi_{xx} + W\Phi_{yy} \right] \sin(W\Phi) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\theta_x, \theta_{xx}, \theta_y, \theta_{yy}$ – первые и вторые частные производные по координатам от показателей экспонент;

$A\Phi_x, A\Phi_{xx}, A\Phi_y, A\Phi_{yy}$ – первые и вторые частные производные по координатам от аргументов тригонометрических функций.

В уравнениях (9)–(11) присутствуют одинаковые, с формальной точки зрения, скобки:
 $(\theta'_x + A\Phi_y)$, $(A\Phi_x - \theta'_y)$; $(\theta''_x + B\Phi_y)$, $(B\Phi_x - \theta''_y)$; $(\theta_x + W\Phi_y)$; $(W\Phi_x - \theta_y)$. (12)

Скобки в (9)–(11) создают нелинейность, что заводит решение в тупик. Избавляясь от нелинейности, т. е. приравнивая (12) нулю, получим следующие соотношения или соотношения Коши-Римана:

$$\theta'_x = -A\Phi_y, \theta'_y = A\Phi_x; \theta''_x = -B\Phi_y, \theta''_y = B\Phi_x; \theta_x = -W\Phi_y, \theta_y = W\Phi_x. \quad (13)$$

Подставляя (13) в дифференциальные уравнения (9)–(11), после упрощений имеем для (9):

$$\left\{ H_\sigma \cdot [\theta'_{xx} - \theta'_{yy} + 2 \cdot A\Phi_{xy}] + (H_\sigma)_{xx} - (H_\sigma)_{yy} \right\} \cdot \text{Sin} A\Phi + \\ + \left\{ H_\sigma \cdot (A\Phi_{xx} - A\Phi_{yy} - 2 \cdot \theta'_{xy}) - 2 \cdot (H_\sigma)_{xy} \right\} \cdot \text{Cos} A\Phi = 0;$$

для (10):

$$\left\{ H_\xi \cdot [-\theta''_{xx} + \theta''_{yy} - 2 \cdot B\Phi_{xy}] - (H_\xi)_{xx} + (H_\xi)_{yy} \right\} \cdot \text{Cos} B\Phi + \\ + \left\{ H_\xi \cdot (B\Phi_{xx} - B\Phi_{yy} - 2 \cdot \theta''_{xy}) + 2 \cdot (H_\xi)_{xy} \right\} \cdot \text{Sin} B\Phi = 0;$$

для (11):

$$[\theta_{xx} + \theta_{yy}] \cdot \text{Cos}(W\Phi) - [2\theta_x W\Phi_x + 2\theta_y W\Phi_y + W\Phi_{xx} + W\Phi_{yy}] \cdot \text{Sin}(W\Phi) = 0.$$

В последних уравнениях присутствуют вторые производные. Определим их из выражений (13), подставляя, имеем следующие инварианты в решениях представленных выше задач:

$$\theta'_{xx} - \theta'_{yy} + 2 \cdot A\Phi_{xy} = 0; \quad A\Phi_{xx} - A\Phi_{yy} - 2 \cdot \theta'_{xy} = 0; \quad (14)$$

$$-\theta''_{xx} + \theta''_{yy} - 2 \cdot B\Phi_{xy} = 0; \quad B\Phi_{xx} - B\Phi_{yy} - 2 \cdot \theta''_{xy} = 0; \quad (15)$$

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0; \quad 2\theta_x W\Phi_x + 2\theta_y W\Phi_y = 0; \quad W\Phi_{xx} + W\Phi_{yy} = 0. \quad (16)$$

С учетом (14)–(16) уравнения (9)–(11) упрощаются:

$$\left\{ (H_\sigma)_{xx} - (H_\sigma)_{yy} \right\} \cdot \text{Sin} A\Phi - \left\{ 2 \cdot (H_\sigma)_{xy} \right\} \cdot \text{Cos} A\Phi = 0, \text{ для (9)}$$

$$\left\{ -(H_\xi)_{xx} + (H_\xi)_{yy} \right\} \cdot \text{Cos} B\Phi + \left\{ 2 \cdot (H_\xi)_{xy} \right\} \cdot \text{Sin} B\Phi = 0, \text{ для (10)}$$

$$0 \equiv 0, \text{ для (11)}$$

Один из вариантов решения последних уравнений для определения H_σ и H_ξ имеют вид:

$$H_\sigma = (C'_{\sigma 1} \cdot x^2 + C'_{\sigma 2} \cdot x) + (C''_{\sigma 1} \cdot y^2 + C''_{\sigma 2} \cdot y) + C_\sigma; \quad (17)$$

$$H_\xi = (C'_{\xi 1} \cdot x^2 + C'_{\xi 2} \cdot x) + (C''_{\xi 1} \cdot y^2 + C''_{\xi 2} \cdot y) + C_\xi. \quad (18)$$

Выражения (17), (18), инварианты (13) и (14)–(16) тождественно удовлетворяют дифференциальные уравнения (9)–(11).

Если в (17) и (18) принять $H_\sigma = C_\sigma$ и $H_\xi = C_\xi$, то для (9) и (10) также имеют место тождества вида $0 \equiv 0$.

Упрощенный вариант дифференциальных уравнений (9) и (10), при $H_\sigma = C_\sigma$ и $H_\xi = C_\xi$, тогда:

$$\left\{ C_\sigma \cdot [\theta'_{xx} + (\theta'_x + A\Phi_y)^2 - \theta'_{yy} - (\theta'_y - A\Phi_x)^2] \right\} \cdot \text{Sin} A\Phi + \\ + \left\{ 2 \cdot C_\sigma \cdot (A\Phi_x - \theta'_y) \cdot (\theta'_x + A\Phi_y) + C_\sigma \cdot (A\Phi_{xx} - A\Phi_{yy}) \right\} \cdot \text{Cos} A\Phi = \\ = -2 \cdot C_\sigma \cdot A\Phi_{xy} \cdot \text{Sin} A\Phi + \left[2 \cdot C_\sigma \cdot \theta'_{xy} \right] \cdot \text{Cos} A\Phi. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ C_{\xi} \cdot \left[-\theta''_{xx} - (\theta''_x + B\Phi_y)^2 + \theta'_{yy} + (\theta'_y - B\Phi_x)^2 \right] \right\} \cdot \text{Cos} B\Phi + \\ & + \left\{ 2 \cdot C_{\xi} \cdot (B\Phi_x - \theta''_y) \cdot (\theta''_x + B\Phi_y) + C_{\xi} \cdot (B\Phi_{xx} - B\Phi_{yy}) \right\} \cdot \text{Sin} B\Phi = \\ & = 2 \cdot C_{\xi} \cdot B\Phi_{xy} \cdot \text{Cos} B\Phi + \left[2 \cdot C_{\xi} \cdot \theta''_{xy} \right] \cdot \text{Sin} B\Phi. \end{aligned} \quad (20)$$

Сравнивая (9), (10) с (19), (20) убеждаемся, что при производных от функций H_{σ} и H_{ξ} присутствуют те же скобки (инварианты), которые определяли нелинейность уравнений (9) и (10). В решениях, на разных стадиях усложнения, появляются одни те же инварианты, упрощающие конечный результат. Такие же инварианты имеют место и в решениях задач для упругой зоны деформирования.

Дифференциальные уравнения в частных производных (3), (4), (5) имеют решения в виде:

$$\tau_{xy} = H_{\sigma} \cdot \exp \theta' \cdot \text{Sin} A\Phi, \text{ при } \theta'_x = -A\Phi_y; \theta'_y = A\Phi_x; \quad (21)$$

$$\xi_x = -\xi_y = H_{\xi} \cdot \exp \theta'' \cdot \text{Cos} B\Phi, \text{ при } \theta''_x = -B\Phi_y; \theta''_y = B\Phi_x; \quad (22)$$

$$\sigma' = \sigma_x + \sigma_y = C_{\sigma} \cdot \exp \theta \cdot \text{Cos} (W\Phi), \text{ при } \theta_x = -W\Phi_y; \theta_y = W\Phi_x. \quad (23)$$

Интегрируя дифференциальные уравнения равновесия в системе (1), в соответствии с (19) и (20), получим выражения для нормальных напряжений:

$$\sigma_x = C_{\sigma} \cdot \exp \theta \cdot \text{Cos} A\Phi - \int C_{\sigma} \cdot \exp \theta \cdot \text{Cos} A\Phi \cdot (\theta_x + A\Phi_y) dx + \sigma_0 + f(y); \quad (24)$$

$$\sigma_y = -C_{\sigma} \exp \theta \cdot \text{Cos} A\Phi + \int C_{\sigma} \cdot \exp \theta \cdot \text{Cos} A\Phi \cdot (\theta_y - A\Phi_x) dy + \sigma_0 + f(x), \quad (25)$$

Если в выражениях (24), (25) воспользоваться соотношениями (13), имеем упрощения в виде:

$$\sigma_x = C_{\sigma} \cdot \exp \theta \cdot \text{Cos} A\Phi + \sigma_0 + f(y); \quad (26)$$

$$\sigma_y = -C_{\sigma} \exp \theta \cdot \text{Cos} A\Phi + \sigma_0 + f(x). \quad (27)$$

Полученные инварианты позволяют замкнуть решения задач для напряжений и деформаций в аналитическом виде. Инварианты определяющие неизвестные функции $\theta', \theta'', \theta$ и $A\Phi, B\Phi, W\Phi$. Для (9):

$$\begin{aligned} \theta'_x &= -A\Phi_y; \quad \theta'_y = A\Phi_x; \\ \theta''_{xx} + \theta''_{yy} &= 0; \quad A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Для (10):

$$\begin{aligned} \theta''_x &= -B\Phi_y; \quad \theta''_y = B\Phi_x; \\ \theta''_{xx} + \theta''_{yy} &= 0; \quad B\Phi_{xx} + B\Phi_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Для (11):

$$\begin{aligned} \theta_x &= -W\Phi_y; \quad \theta_y = W\Phi_x; \\ \theta_{xx} + \theta_{yy} &= 0; \quad W\Phi_{xx} + W\Phi_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Для качественной и количественной оценки полученного результата рассчитывались контактные напряжения в процессе пластического симметричного нагружения полосы, т. е. при осадке. Удовлетворяя соотношениям (28), имеем:

$$\begin{aligned} A\Phi &= AA_6 \cdot x \cdot y - AA_{13} \cdot x \cdot y \cdot (x^2 - y^2); \\ \theta' &= - \left\{ 0.5 \cdot AA_6 \cdot (x^2 - y^2) - AA_{13} \cdot \left[0.25 \cdot (x^4 + y^4) - 1.5 \cdot x^2 \cdot y^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

В выражениях постоянные величины определялись из граничных условий:

$$\begin{aligned} AA_6 &= 4 \cdot \frac{\psi_0}{l \cdot h}; & AA_{13} &= 16 \cdot \psi_1 \cdot \frac{l - 2 \cdot h}{l^3 \cdot h \cdot (l + h)}; \\ \psi_0 &= \arctg[2 \cdot f \cdot (1 - f)]; & \psi_1 &= \arctg[1.7 \cdot f \cdot (1 - f)], \end{aligned} \quad (31)$$

где l и h – длина, и высота очага деформации при осадке полосы;
 f – коэффициент трения.

Коэффициент:

$$C_\sigma = \frac{k_0}{\text{Cos}A\Phi_0} \cdot \exp(-\theta'_0), \quad (32)$$

при этом $A\Phi_0 = AA_6 \cdot \frac{l \cdot h}{4} - AA_{13} \cdot \frac{l \cdot h}{4} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right);$

$$\theta'_0 = -A\theta_0 = - \left\{ 0.5 \cdot AA_6 \cdot \left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) - AA_{13} \cdot \left[0.25 \cdot \left(\frac{l^4}{16} + \frac{h^4}{16} \right) - 1.5 \cdot \frac{l^2 \cdot h^2}{16} \right] \right\}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\text{Cos}A\Phi_0} \cdot \text{Cos}A\Phi + k_0; & \sigma_y &= -3 \cdot k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\text{Cos}A\Phi_0} \cdot \text{Cos}A\Phi + k_0; \\ \tau_{xy} &= k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\text{Cos}A\Phi_0} \cdot \text{Sin}A\Phi. \end{aligned} \quad (33)$$

Данные расчетов по формулам (33) представлены на рис. 1 и 2.

Полученный результат для данных граничных условий (31) показывает, что формулы (33) описывают весь очаг деформации, без предварительного разбиения его на отдельные зоны, с использованием разных законов трения, как это имеет место в работах [9], [10]. Относительные контактные напряжения реагирует на фактор формы l/h и коэффициент трения f , рис. 1 и 2. С увеличением коэффициента трения нормальные и касательные контактные напряжения возрастают.

Для оценки результата в теории упругости, выражение (23), согласно работе [6], определена функция напряжений ϕ . Значение функции напряжений имеет вид:

$$\phi = C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \text{Cos}W\Phi.$$

Анализ показывает, что функция напряжений может быть усложнена и принимает вид [7]:

$$\phi = [C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta + C_{\sigma 2} \exp(-\theta)] \cdot (C_{\sigma 3} \text{Sin}W\Phi + C_{\sigma 4} \cdot \text{Cos}W\Phi), \quad (34)$$

при

$$\theta_x = \mp W\Phi_y; \quad \theta_y = \pm W\Phi_x; \quad \theta_{xx} + \theta_{yy} = 0; \quad W\Phi_{xx} + W\Phi_{yy} = 0.$$

Выражения (34) удовлетворяет уравнению Лапласа и бигармоническому уравнению. В работе [11] представлено выражение для функции напряжений в виде:

$$\phi = \text{Sin}(C \cdot x) \cdot [C_1 \cdot \exp(\alpha \cdot y) + C_2 \cdot \exp(-\alpha \cdot y)]. \quad (35)$$

Покажем, что выражение (35) является частным случаем выражения (34).

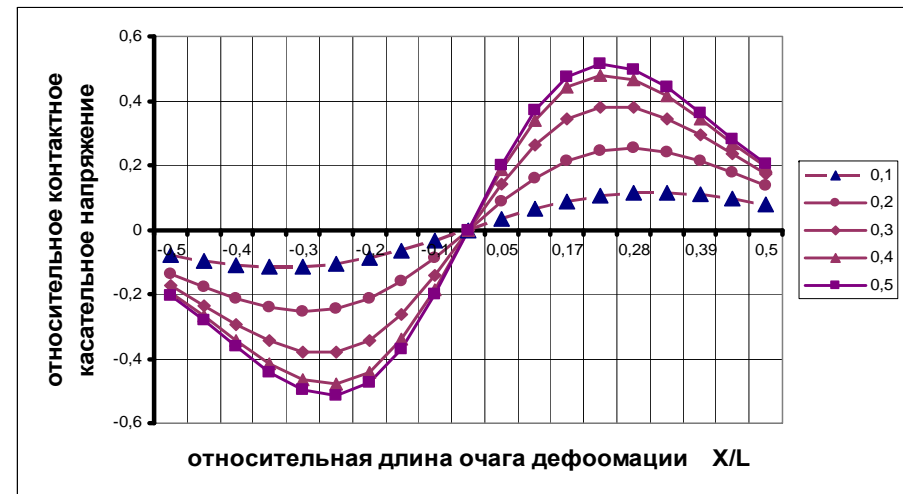
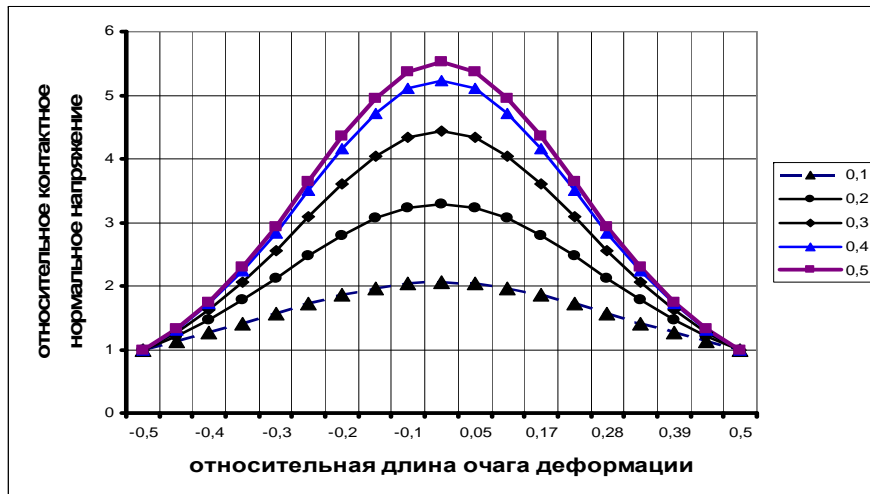


Рис. 1. Распределение нормальных и касательных напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках $\frac{l}{h} = 8$; $f = 0,1 \dots 0,5$

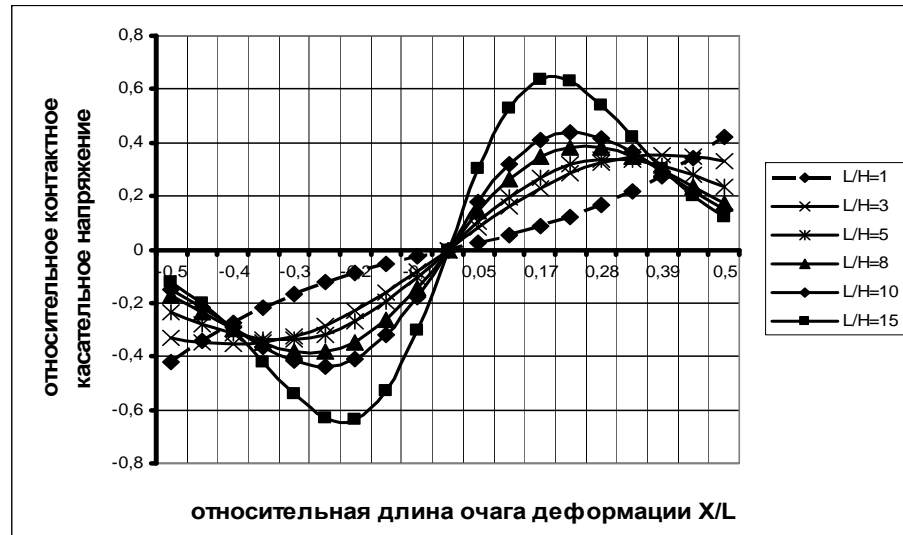
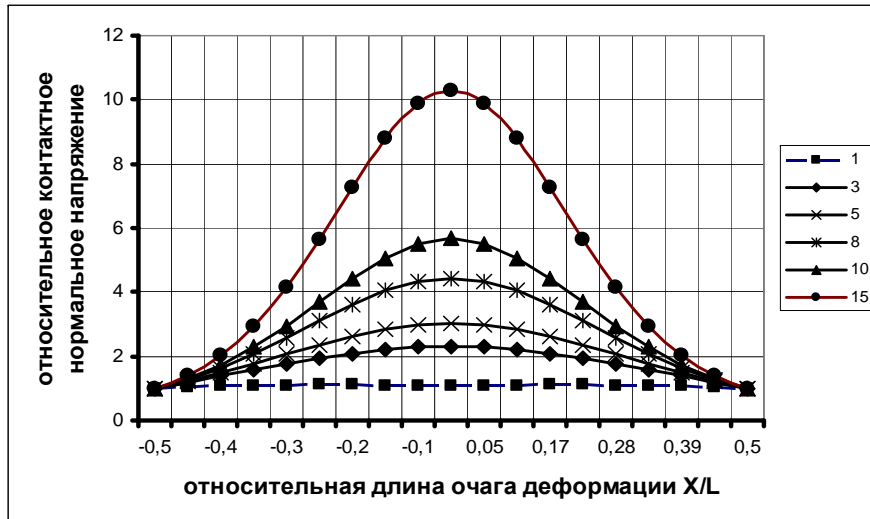


Рис. 2. Распределение нормальных и касательных напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках $f = 0,3$; $\frac{l}{h} = 1 \dots 15$

Для этого аргумент тригонометрической функции и показатель экспоненты должны быть связаны соотношениями (34).

$$W\Phi = C \cdot x, \quad \theta = \pm C \cdot y, \quad \text{тогда } W\Phi_x = C, \quad W\Phi_y = 0, \quad \theta_y = \pm C, \quad \theta_x = 0.$$

Имеют место соотношения:

$$\theta_x = \mp W\Phi_y = 0 = 0; \quad \theta_y = \pm W\Phi_x = \pm C = C.$$

Кроме этого, функции θ и $W\Phi$ являются гармоническими, удовлетворяющие уравнениям Лапласа, т. е.:

$$\theta_{xx} = \theta_{yy} = W\Phi_{xx} = W\Phi_{yy} = 0.$$

Из этого следует, что аргументы функций выражения (35) удовлетворяют соотношению Коши-Римана и уравнениям Лапласа, поэтому решение (35) является частным решением по отношению (34).

ВЫВОДЫ

Поставлена и решена плоская задача теории пластичности и упругости с использованием обобщенных инвариантов для напряженного, деформированного состояний. Обобщенные инварианты связывают аргументы экспоненциальной и тригонометрической функций, выражениями (28)–(30). Функции, удовлетворяющие определяющим уравнениям теории пластичности и упругости, являются гармоническими. Расчеты и анализ полученных выражений показывает, что аналитические решения задач механики достоверно описывают напряженное состояние деформированного твердого тела.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чигиринский В. В. *Определение напряженного состояния пластического тела в условиях плоской деформации* / В. В. Чигиринский // *Изв. вузов. Черная металлургия.* – 1990. – № 7. – С. 48–49.
2. Чигиринский В. В. *Определение деформированного состояния пластического тела в условиях плоского течения* // *Изв. вузов. Черная металлургия.* – 1990. – № 9. – С. 32–33.
3. *The Influence of the Temperature Factor on Deformability of the Plastic Medium* / V. V. Chygyryns'kyu, I. Matuzic, F. Vodopivec, I. V. Gordienko. // *Metallurgija. Zagreb.* – 2006. – Vol. 45, br. 2. – P. 115–118.
4. Чигиринский В. В. *Новый метод решения задач теории пластичности* / В. В. Чигиринский // *Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении.* – Запорожье, 2008. – № 1. – С. 57–62.
5. Чигиринский В. В. *Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций* / В. В. Чигиринский // *Изв. вузов. Черная металлургия.* – 2009. – № 5. – С. 11–16.
6. Чигиринський В. В. *Про деякі особливості гармонічних функцій в теорії пружності* / В. В. Чигиринський, В. Г. Шевченко // *Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні.* – Запоріжжя, 2008. – № 2. – С. 102–105.
7. Чигиринский В. В. *Особенности решения плоской задачи теории упругости в полярных координатах с использованием гармонических функций* / В. В. Чигиринский, В. В. Плахотник // *Школа подземной разработки: материалы международной научно-технической конференции.* – Днепропетровск, 2011. – С. 159–166.
8. Тихонов А. Н. *Уравнения математической физики* / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
9. Громов Н. П. *Теория обработки металлов давлением* / Н. П. Громов. – М.: Металлургия, 1978. – 359 с.
10. Сторожев М. В. *Теория обработки металлов давлением* / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 422 с.
11. Никифоров С. Н. *Теория упругости и пластичности* / С. Н. Никифоров. – М.: Госиздат, 1955. – 284 с.

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой ЗНТУ.

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: valerij@zntu.edu.ua